ПИСМЕНИ ИСПИТ ИЗ ТЕОРИЈЕ БРОЈЕВА
13. септембар 2017

Професор: Бојан Башић

1. Кажемо да је природан број n *строго непалиндромичан* уколико његов запис ни у једној бази b за $2 \leqslant b \leqslant n-2$ не представља палиндром. Доказати да је сваки строго непалиндромичан број већи од 6 прост.

   Једна идеја: Ако је n сложен број већи од 6 и притом паран, посматрати његов запис у бази $\frac{n}{2}-1$. Ако је пак n непаран, и ако је p његов најмањи прост фактор, тада као специјалан случај издвојити $n = p^2$ (који се може урадити раздвајањем на два подслучаја, $n = 9$ и $n > 9$), а ван тог специјалног случаја показати да се n у погодно одабраној бази може записати као двоцифрен палиндром.

2. У скупу природних бројева решити једначину

$$74x! + 68 = y^3.$$

3. Нека је n природан број облика $n = 4m^2 + 3$, где $3 \nmid m$. Показати да постоји прост делилац броја n облика $12k + 7$.

   Једна идеја: Најпре показати да су сви прости делиоци броја n облика $3k+1$, што се може извести на следећи начин: за произвољно $p \mid n$, на основу релације $-3 \equiv 4m^2 = (2m)^2 \pmod p$ утврдити најпре вредност $\left(\frac{-3}{p}\right)$, а уз помоћ Закона квадратне реципрочности показати и једнакост $\left(\frac{-3}{p}\right) = \left(\frac{p}{3}\right)$, па из ова два закључка добити да p мора бити облика $3k+1$. Потом једноставно показати да n садржи прост делилац који даје остатак 3 при дељењу са 4, те на основу малопређашње констатације добити да тај прост делилац заправо мора бити облика $12k+7$.

4. Нека је дата четворочлана аритметичка прогресија природних бројева чији се сваки члан може представити као збир квадрата два цела броја. Доказати да је корак те прогресије дељив са 4.

   Једна идеја: Ако је d корак те прогресије, и ако d даје остатак 1 или 3 при дељењу са 4, тада једноставно добити контрадикцију, а ако d даје остатак 2 при дељењу са 4, тада најпре закључити да сви чланови посматране прогресије морају бити парни, па потом поделити све са 2 и након тога добити контрадикцију.